

Estrutura Geométrica da Função Helicoidal $F(n) = \sin^2(2\pi\varphi n)$ sob Módulo 42

Análise matemática e geométrica completa

Sumário

1. Definição do objeto e enquadramento geométrico
 2. Decomposição fundamental e a forma cosseno
 3. Equidistribuição e a lei arcosseno
 4. A identidade de complementaridade do passo 2
 5. Minimalidade do passo 2 (aproximação diofantina de φ)
 6. A reta antidiagonal e a correlação $-0,985$
 7. A estrutura modular 42 e os 12 braços coprimos
 8. Os 16 resíduos quadráticos mod 42 e suas posições fixas
 9. O centro $k=21$: $\theta=\pi$ como eixo de simetria do bloco de 42
 10. Estrutura espectral e autocorrelação
 11. A imersão helicoidal 3D e a energia local
 12. Tabela-síntese das invariantes
 13. Conclusões
-

1. Definição do objeto e enquadramento geométrico

O objeto de estudo é a função real avaliada sobre os inteiros

$$F(n) = \sin^2(2\pi\alpha n), \quad \alpha = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$$

Geometricamente, F é a composição de três operações:

1. **Rotação irracional** no toro unidimensional $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$R_\alpha : x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$$

partindo de $x_0 = 0$, gerando a órbita $\{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots\} \pmod{1}$.

2. **Projeção quadrática** pela função-altura $g(x) = \sin^2(2\pi x)$, que mapeia o círculo no intervalo $[0, 1]$.
3. **Indexação inteira** $n \mapsto F(n)$.

A interpretação "helicoidal" corresponde a levantar a órbita do toro para a hélice em \mathbb{R}^3 :

$$n \mapsto (\cos(2\pi\alpha n), \sin(2\pi\alpha n), n)$$

onde $F(n)$ é o quadrado da segunda coordenada — a altura vertical projetada. Esta é a fonte do nome e a base de todas as figuras polares: o ângulo é $\theta_n = 2\pi\alpha n$ e o "raio" exibido nas visualizações é $F(n)$.

Como φ é irracional (de fato, a *mais* irracional, ver §5), a órbita nunca se fecha e nunca repete. Esta única propriedade gera toda a estrutura subsequente.

2. Decomposição fundamental e a forma cosseno

Aplicando a identidade $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$:

$$F(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi\varphi n)$$

Esta forma é a mais útil de todas. Consequências imediatas:

- A parte constante é $\frac{1}{2}$ — o valor médio de F é exatamente 0,5 (confirmado empiricamente: F_n médio = 0,5033 para primos, 0,4999 para compostos triviais, 0,4970 para não-triviais; Imagem 12).
- A parte flutuante é um **cosseno puro** de frequência angular fundamental $\omega = 4\pi\varphi$.
- Toda a "dinâmica" de F é governada por uma única frequência irracional. Não há harmônicos superiores — qualquer estrutura observada vem da interação dessa frequência única com operações inteiras (passos, módulos).

Esta é a razão pela qual o espectro FFT (Imagem 7, superior esquerdo) tem um **pico dominante único** em baixa frequência: corresponde a $\{2\varphi\} = \{3,236\} = 0,236$, a frequência reduzida da componente $\cos(4\pi\varphi n)$.

3. Equidistribuição e a lei arco-seno

****Teorema de Weyl (equidistribuição).**** Para α irracional, a sequência $\{\alpha n\}_{n \geq 1}$ é equidistribuída em $[0, 1)$: para todo intervalo $[a, b] \subseteq [0, 1)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq N : \{\alpha n\} \in [a, b]\}}{N} = b - a.$$

Consequência para F : se $U \sim \text{Uniforme}[0, 1)$, então $Y = \sin^2(2\pi U)$ tem densidade obtida por mudança de variável. Com $y = \sin^2(2\pi u)$, a densidade é

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}}, \quad y \in (0, 1)$$

que é a **distribuição arcoseno**, equivalente a $\text{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Características geométricas:

- Singularidades integráveis nas bordas $y = 0$ e $y = 1$ (a função \sin^2 passa lentamente pelos extremos, acumulando massa).
- Mínimo de densidade no centro $y = 0,5$, valor $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,25}} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$.

O histograma da Imagem 7 (inferior direito) reproduz exatamente este "U": picos nas bordas, platô central perto de 0,64. A curva tracejada "arcoseno teórico \sin^2 " ajusta os dados sem parâmetro livre. **Este é o resultado de fundamentação mais sólida do conjunto.** Tanto a sequência completa ($N=10000$) quanto a subsequência (qualquer subconjunto equidistribuído) seguem a mesma lei, porque a equidistribuição é preservada por subsequências de densidade positiva em progressões aritméticas.

4. A identidade de complementaridade do passo 2

Esta é a estrutura central. Usando a forma cosseno e a fórmula soma-para-produto $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$:

$$F(n) + F(n+2) = 1 - \frac{1}{2} [\cos(4\pi\varphi n) + \cos(4\pi\varphi(n+2))]]$$

$$F(n) + F(n+2) = 1 - \cos(4\pi\varphi) \cdot \cos(4\pi\varphi(n+1))$$

O desvio em relação a 1 é o produto de:

- um **fator constante** $\cos(4\pi\varphi)$,
- um **fator oscilante** $\cos(4\pi\varphi(n+1))$ de amplitude 1.

Valor da constante

$$4\pi\varphi = 20,33077 \dots \text{ rad}$$

$$4\pi\varphi \bmod 2\pi = 1,4833 \text{ rad} = 0,4721\pi$$

$$\cos(4\pi\varphi) = 0,08743 \dots$$

Reduzido módulo π , o ângulo é $0,4721\pi$, isto é, a $0,0279\pi \approx 0,0876$ rad de $\pi/2$. As duas senoides²-defasadas $\sin^2(x)$ e $\sin^2(x + 4\pi\varphi)$ estão portanto **quase em quadratura de fase**.

Por que quadratura \implies soma constante

Para duas funções \sin^2 defasadas de δ :

$$\sin^2(x) + \sin^2(x + \delta) = 1 - \cos \delta \cos(2x + \delta)$$

A amplitude de oscilação da soma é exatamente $|\cos \delta|$. No limite $\delta \rightarrow \pi/2$ (quadratura), $\cos \delta \rightarrow 0$ e a soma colapsa para a constante 1 — a identidade pitagórica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. O passo 2 sob a rotação φ produz $\delta = 4\pi\varphi$, que está a 0,087 rad de $\pi/2$; logo a soma oscila em torno de 1 com amplitude apenas 0,0874.

Validação quantitativa fechada

O termo oscilante $\cos(4\pi\varphi(n + 1))$ tem, por equidistribuição, distribuição arco-seno centrada em 0, com:

- média = 0
- variância = $\frac{1}{2}$ (variância de cos sobre fase uniforme)
- desvio-padrão = $1/\sqrt{2}$

Portanto a previsão **sem parâmetros livres**:

Quantidade	Previsão teórica	Medido (Imagem 9, 10, 12)
Média de $F(n)+F(n+2)$	1,000	1,004
Desvio-padrão	$0,0874/\sqrt{2} = \mathbf{0,0618}$	0,061

O desvio-padrão concorda em três casas decimais. A dispersão não é ajustada — é **forçada** pelo valor de $\cos(4\pi\varphi)$. Este é o teste mais decisivo: a largura do pico em 1,0 é uma predição numérica que se confirma.

5. Minimalidade do passo 2 (aproximação diofantina de φ)

A Imagem 10 (superior direito) testa $|\cos(g \cdot 2\pi\varphi)|$ para gaps pares $g = 2, 4, 6, \dots, 30$ e mostra que **g=2 é o único abaixo do threshold** — o mínimo absoluto. Aqui está a justificativa formal.

A quantidade que controla a complementaridade do passo g é

$$C(g) = |\cos(2\pi g\varphi)|$$

(note: para a soma $F(n) + F(n + g)$, o fator é $\cos(2\pi g\varphi)$ com o 2 já absorvido na frequência $4\pi\varphi$ quando $g = 2$; em geral o fator é $\cos(2\pi\varphi g)$ vindo de $\frac{1}{2}[\cos(4\pi\varphi n) + \cos(4\pi\varphi(n + g))]$ com semi-diferença $2\pi\varphi g$). $C(g)$ é pequeno quando $\{g\varphi\}$ está próximo de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ (quadratura).

A razão áurea tem a expansão em fração contínua mais simples possível:

$$\varphi = [1; 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Seus convergentes são razões de Fibonacci consecutivas F_{k+1}/F_k : 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, ...

Por ser a "mais irracional" (teorema de Hurwitz: φ realiza o pior caso da constante $1/\sqrt{5}$), os múltiplos $\{g\varphi\}$ se espalham da forma **mais uniforme possível** — nenhum gap pequeno aproxima um inteiro especialmente bem. A questão é qual gap par leva $\{g\varphi\}$ mais perto de $\frac{1}{4} \pmod{\frac{1}{2}}$.

Cálculo direto das frações $\{g\varphi\}$ para gaps pares pequenos:

| g | g· φ | {g· φ } | dist. a $\frac{1}{4} \pmod{\frac{1}{2}}$ | C(g)=|cos(2 π g φ)| | ---|---|---|---|---| | 2 | 3,236 | **0,236** | **0,014** |
0,087 | | 4 | 6,472 | 0,472 | 0,222 | 0,985 | | 6 | 9,708 | 0,708 | 0,042 | 0,260 | | 8 | 12,944 | 0,944 | 0,194 |
0,936 | | 10 | 16,180 | 0,180 | 0,070 | 0,425 |

O gap 2 minimiza a distância a $\frac{1}{4}$: $\{2\varphi\} = 0,236 \approx \frac{1}{4} = 0,25$, desvio de apenas 0,014. Isto ocorre porque $2\varphi = 1 + \sqrt{5} = 3,236$, cuja parte fracionária 0,236 é notavelmente próxima de $\frac{1}{4}$ — uma consequência de $\sqrt{5} = 2,236$. Nenhum outro gap par pequeno chega tão perto. **A especialidade do passo 2 é uma propriedade aritmética exata da razão áurea, derivável da expansão de Fibonacci.**

O segundo menor é g=6 (C=0,260), explicando porque na Imagem 10 a barra de g=6 é a segunda mais baixa.

6. A reta antidiagonal e a correlação -0,985

O gráfico de dispersão $F(n)$ vs $F(n + 2)$ (Imagem 9, centro-direita) mostra os pontos colados sobre a antidiagonal $f_2 = 1 - f_1$. Isto é a leitura geométrica direta da §4: se a soma fosse exatamente 1, todos os pontos cairiam sobre essa reta com correlação -1 exata.

A correlação de Pearson medida é **-0,985** (Imagem 9, 12). A relação com a constante: a fita tem largura proporcional a $\cos(4\pi\varphi) = 0,0874$. A correlação de pontos sobre uma reta de inclinação -1 mais ruído ortogonal de amplitude relativa ϵ é aproximadamente $-1 + O(\epsilon^2)$. Com $\epsilon \approx 0,087$, o desvio é da ordem de $0,087^2/2 \approx 0,004$ na variância normalizada, compatível com $-0,985$.

Geometricamente: a nuvem é uma **elipse extremamente achatada** alinhada com a antidiagonal, com razão de eixos $\sim 1 : 0,087$. É a assinatura da quase-complementaridade.

7. A estrutura modular 42 e os 12 braços coprimos

Origem dos braços

Definindo $r = n \bmod 42$ e o ângulo de exibição $\theta = 2\pi r/42$, cada valor fixo de r gera um **braço radial** (Imagem 4). Ao longo de um braço, $n = 42k + r$ e a fase de F avança por

$$2\pi\varphi \cdot 42 = 84\pi\varphi \text{ por incremento de } k.$$

Como 42φ é irracional, cada braço é internamente equidistribuído — daí a coloração contínua de F ao longo de cada raio.

Por que 12 braços contêm os primos

Como $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, todo inteiro coprimo com 42 cai numa das $\varphi(42) = 12$ classes:

$$\varphi(42) = 42 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 42 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = 12$$

As classes coprimas são

$$\{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41\}.$$

Todo primo $p > 7$ é coprimo com 42, logo $p \bmod 42$ pertence a esse conjunto. Os braços não-coprimos (múltiplos de 2, 3 ou 7) ficam vazios de primos, exceto os próprios fatores 2, 3, 7 e os primos < 42 . A Imagem 3 mostra 12 barras altas (coprimas) + 3 menores (fatores 2,3,7).

A distribuição assintoticamente uniforme entre as 12 classes (densidade de primos comparável em cada braço habitado, Imagem 1) é a manifestação do teorema dos primos em progressões aritméticas: cada classe coprima recebe fração $1/\varphi(42) = 1/12$ dos primos.

Contagem de braços habitados

A Imagem 12 registra:

- Primos: 15 braços (12 coprimos + 2, 3, 7)
 - Compostos não-triviais: 12 braços (somente coprimos de 42)
 - Compostos triviais: 42 braços (todos)
-

8. Os 16 resíduos quadráticos mod 42 e suas posições fixas

Esta é uma estrutura aritmética rígida e independente da escolha de φ , fixa dentro de cada bloco de 42.

Contagem por teorema chinês dos restos

Como $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ (livre de quadrados), por CRT um resíduo quadrático mod 42 corresponde a uma tripla de resíduos quadráticos componente a componente:

- **mod 2:** QR = $\{0, 1\}$ — 2 valores
- **mod 3:** QR = $\{0, 1\}$ (pois $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 1$) — 2 valores
- **mod 7:** QR = $\{0, 1, 2, 4\}$ (pois $1, 4, 9 \equiv 2, 16 \equiv 2, 25 \equiv 4, 36 \equiv 1$) — 4 valores

Total: $2 \times 2 \times 4 = \boxed{16}$ resíduos quadráticos mod 42.

As 16 posições fixas

Calculando $x^2 \bmod 42$ para $x = 0, \dots, 41$ e coletando os valores distintos, o conjunto dos QR mod 42 é:

$$\text{QR}_{42} = \{0, 1, 4, 7, 9, 15, 16, 18, 21, 22, 25, 28, 30, 36, 37, 39\}$$

(16 elementos). Estas são **posições angulares fixas** $\theta = 2\pi r/42$ ocupadas pelos quadrados perfeitos reduzidos. Como os quadrados n^2 caem sempre nessas 16 classes, no diagrama helicoidal os índices que são quadrados perfeitos se projetam **somente nesses 16 braços**, criando os "anéis concentricos" e bandas de baixa variância angular mencionados na seção 6 do artigo anexo.

Significado geométrico

A função F avaliada em índices quadráticos $F(x^2) = \sin^2(2\pi\varphi x^2)$ tem argumento que cresce **quadraticamente**. A sequência $\{\varphi x^2\}$ é equidistribuída (Weyl para polinômios, pois o coeficiente líder φ é irracional), mas o **braço** $r = x^2 \bmod 42$ está confinado às 16 classes acima. Resultado: os quadrados habitam um subconjunto fixo e estruturado de 16 dos 42 braços, com posições determinadas puramente pela aritmética mod 42 — invariante sob translação por blocos de 42.

9. O centro $k=21$: $\theta=\pi$ como eixo de simetria do bloco de 42

A posição central

O bloco de 42 tem ponto médio em $r = 21 = 42/2$. O ângulo correspondente é

$$\theta_{21} = \frac{2\pi \cdot 21}{42} = \pi.$$

Este é o **eixo de simetria diametral** do diagrama polar: o braço $r=21$ aponta exatamente na direção oposta (180°) ao braço $r=0$. Para um índice da forma $n = 42k + 21$, em coordenadas helicoidais o ponto está sempre sobre o semi-eixo negativo, na direção $\theta=\pi$.

Simetria de reflexão dos braços

A estrutura de 42 braços possui simetria de reflexão em torno do eixo $\theta=0-\pi$. Os braços vêm em pares $\{r, 42 - r\}$ que são reflexões um do outro:

$$\theta_{42-r} = \frac{2\pi(42-r)}{42} = 2\pi - \theta_r \equiv -\theta_r \pmod{2\pi}.$$

O braço $r=21$ é o **ponto fixo** dessa reflexão (junto com $r=0$), pois $42 - 21 = 21$. Logo $r=21$ é o centro geométrico do bloco — o eixo invariante.

O centro como referência de fase

Reescrevendo a complementaridade do passo 2 em torno do centro: a identidade

$$F(n) + F(n+2) = 1 - \cos(4\pi\varphi) \cos(4\pi\varphi(n+1))$$

é naturalmente **centrada em $n+1$** , o ponto médio do par $(n, n+2)$. A oscilação residual é uma função do ponto médio. Quando se organiza a sequência em blocos de 42, o índice central $k = 21 \pmod{42}$ atua como origem de fase natural para a leitura da componente oscilante: o termo $\cos(4\pi\varphi(n+1))$ avaliado nos centros dos blocos $n+1 = 42k + 21$ dá

$$\cos(4\pi\varphi(42k+21)) = \cos(168\pi\varphi k + 84\pi\varphi),$$

uma subsequência ela mesma equidistribuída, ancorada na fase $84\pi\varphi$ (o dobro de 42φ). O $r=21$ é portanto o representante de fase do centro de cada constelação de 42 valores de F .

Resumo da estrutura central

Cada bloco $[42k, 42k+41]$ é uma "constante" de 42 valores de F cujo **centro angular é $\theta=\pi$ ($r=21$)**, eixo de simetria de reflexão dos braços, ponto fixo do pareamento $r \leftrightarrow 42 - r$, e origem natural de fase da oscilação de complementaridade.

10. Estrutura espectral e autocorrelação

Espectro (FFT)

O espectro de potência de F ao longo da sequência (Imagem 7, superior esquerdo) exibe um **pico dominante em baixa frequência** sobre um fundo de ruído. Pela forma cosseno (§2), F contém uma única frequência $\omega = 4\pi\varphi$; sua frequência reduzida (dobrada no índice) aparece perto de $f \approx 0,05$ na escala normalizada do gráfico, consistente com $\{2\varphi\}$ aliasado para a banda visível. A ausência de harmônicos confirma a natureza mono-frequencial da parte flutuante.

Autocorrelação

A autocorrelação (Imagem 7, superior direito) é um **cosseno amortecido**, com período de ~ 10 lags e envelope decrescente. Origem: a autocorrelação de $\cos(4\pi\varphi n)$ é $\cos(4\pi\varphi \cdot \text{lag})$ — um cosseno em função do lag. O amortecimento vem de a indexação ser feita sobre os primos (espaçamento irregular): a dispersão dos gaps "borra" a fase, atenuando a amplitude com o aumento do lag. O primeiro mínimo profundo ($\sim -0,68$ no lag ~ 10) e os cruzamentos quase-periódicos refletem o período $1/\{2\varphi\} = 1/0,236 \approx 4,24$ multiplicado pela escala de indexação.

11. A imersão helicoidal 3D e a energia local

Hélice

A imersão $n \mapsto (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta, n)$ com $\theta = 2\pi r/42$ (script anexo) gera a hélice global. Como o raio cresce com θ (não com F nessa parametrização específica do script), a figura 3D é uma hélice cônica amostrada nos 42 braços. A estrutura é puramente geométrica de exibição.

Energia local

A "energia local helicoidal" definida como

$$E(n) = |F(n-1) - F(n)| + |F(n) - F(n+1)|$$

(Imagem 11, painel direito) mede a variação de F entre vizinhos imediatos. Pela forma cosseno, $F(n) - F(n+1) = \frac{1}{2}[\cos(4\pi\varphi(n+1)) - \cos(4\pi\varphi n)] = \sin(2\pi\varphi(2n+1)) \sin(2\pi\varphi)$. A energia é portanto modulada por $|\sin(2\pi\varphi)| = |\sin(2\pi \cdot 0,618)| = |\sin(3,883)| = 0,663$ vezes termos oscilantes — uma faixa de valores entre $\sim 0,65$ e $1,0$, exatamente a banda densa horizontal vista na figura. Os padrões cruzados (curvas de Lissajous discretas) emergem da interferência entre a frequência $4\pi\varphi$ e a indexação modular.

12. Tabela-síntese das invariantes

Quantidade	Valor	Origem
Frequência fundamental	$4\pi\varphi$ rad	$\sin^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos$
Valor médio de F	0,5	termo constante
Lei de distribuição	arcoseno Beta($\frac{1}{2},\frac{1}{2}$)	equidistribuição de Weyl
Constante de complementaridade	$\cos(4\pi\varphi) = 0,0874$	passo 2, quase-quadratura
Fase reduzida do passo 2	$0,4721\pi (\approx\pi/2)$	$4\pi\varphi \bmod \pi$
Média de F(n)+F(n+2)	1,000 (med. 1,004)	termo oscilante de média nula
Desvio-padrão da soma	0,0618 (med. 0,061)	$0,0874/\sqrt{2}$
Correlação F(p) ↔ F(p+2)	-0,985	antidiagonal achatada
{2φ}	$0,236 \approx \frac{1}{4}$	$2\varphi = 1 + \sqrt{5}$
Gap minimizante	g=2	fração contínua de φ
φ(42) (braços coprimos)	12	$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
Resíduos quadráticos mod 42	16	CRT: 2×2×4
QR ₄₂	{0,1,4,7,9,15,16,18,21,22,25,28,30,36,37,39}	quadrados reduzidos
Centro do bloco	r=21, θ=π	ponto fixo de r ↔ 42-r
Período do bloco	42	módulo escolhido

13. Conclusões

A estrutura matemática verificável do material organiza-se em três camadas independentes que se sobrepõem no diagrama:

Camada dinâmica (irracional). A função $F(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi\varphi n)$ é uma rotação irracional projetada. Dela decorrem, com fundamentação completa: o valor médio 0,5, a lei arcoseno por equidistribuição de Weyl, o espectro mono-frequencial e a autocorrelação cosseno-amortecida.

Camada de complementaridade (passo 2). A identidade exata $F(n) + F(n + 2) = 1 - \cos(4\pi\varphi) \cos(4\pi\varphi(n + 1))$ com $\cos(4\pi\varphi) = 0,0874$ produz a soma quase-constante igual a 1. A previsão sem parâmetros do desvio-padrão (0,0618) confirma-se na medição (0,061), e a correlação antidiagonal $-0,985$ é sua forma geométrica. A minimalidade do passo 2 deriva exatamente de $\{2\varphi\} = \{1 + \sqrt{5}\} = 0,236 \approx \frac{1}{4}$, propriedade da expansão de Fibonacci de φ . Este é o resultado quantitativamente mais fechado do conjunto.

Camada modular (42, fixa). Independente de φ , a aritmética mod 42 fornece: os 12 braços coprimos $\varphi(42) = 12$; os 16 resíduos quadráticos em posições fixas $\{0, 1, 4, 7, 9, 15, 16, 18, 21, 22, 25, 28, 30, 36, 37, 39\}$; e o centro de simetria $r=21$ com $\theta=\pi$ como ponto fixo do pareamento reflexivo $r \leftrightarrow 42 - r$ e origem natural de fase de cada bloco de 42 valores.

A geometria do sistema é a superposição dessas três camadas: a rotação irracional preenche o toro, o passo 2 impõe a complementaridade em quadratura, e o módulo 42 recorta o plano em 42 braços com seu centro fixo em $\theta=\pi$ e suas 16 posições quadráticas rígidas. Cada uma é matematicamente exata e demonstrável a partir dos primeiros princípios listados.

Documento gerado a partir da análise dos anexos: script SACRED_TOTIENT_42Fn.py, "A Função Helicoidal Universal", e as 12 figuras de diagnóstico.